Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XIV-a, Baia Mare, 16 noiembrie 2019

Clasa a VI-a

Subiectul 1.

Fie $a_1, a_2, ..., a_{2019}$ numere naturale nenule. Arătați că numărul

$$A = 2019^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)\ldots(a_{2019}+a_1)}-1$$

are cel puțin trei divizori diferiți de 1.

Subiectul 2.

Fie numerele $a, b, c \in \mathbf{N}$, distincte două câte două care verifică egalitatea

$$a+b+c=(a-b)\cdot(b-c)\cdot(a-c).$$

Determinați cea mai mică valoare a numărului $a+b+c$.

Subiectul 3.

Fie $n \in \mathbf{N}$ şi unghiul AOB un unghi alungit. În același semiplan determinat de dreapta AB se consideră punctele $A_1, A_2, A_3, ..., A_n, B_1, B_2, B_3, ..., B_n$ cu proprietățile:

i) $m(\angle AOA_1) = m(\angle BOB_1) = 1^\circ$; $m(\angle A_1OA_2) = m(\angle B_1OB_2) = 3^\circ$; $m(\angle A_2OA_3) = m(\angle B_2OB_3) = 5^\circ$ și așa mai departe.

ii) unghiurile A_iOA_{i+1} au interioarele disjuncte două câte două și unghiurile B_iOB_{i+1} au interioarele disjuncte două câte două oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

a) Aflați valoarea maximă a numărului natural n.

b) Câte perechi de semidrepte $[OA_i$, $[OB_j$ coincid?

c) Câte perechi de semidrepte $[OA_i$, $[OB_j$ sunt perpendiculare?

Notă:

1) Timp de lucru 2 h.
2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

COLEGIUL NAȚIONAL
„VASILE LUCACIU"
BAIA MARE

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Concursul "PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"
ediția a XIV-a, Baia Mare, 16 noiembrie 2019
BAREM DE CORECTARE CLASA A VI-A

Subiectul 1.

Fie $a_1, a_2, ..., a_{2019}$ numere naturale nenule. Arătați că numărul

$$A = 2019^{(a_1+a_2)\cdot(a_2+a_3)\cdot(a_3+a_4)\cdot...\cdot(a_{2019}+a_1)}-1$$

are cel puțin trei divizori diferiți de 1.

Soluție:

$(a_1+a_2)\cdot(a_2+a_3)\cdot...\cdot(a_{2019}+a_1)$ este un număr par…………………………………………………**2p**

$u.c.(9^{2k})=1 \Rightarrow u.c.(A)=0$ ……………………………………………………………………...**2p**

Trei divizori sunt 2,5 și 10……………………………………………………………..………..**3p**

Subiectul 2.

Fie numerele $a,b,c\in\mathbf{N}$, distincte două câte două care verifică egalitatea

$$a+b+c=(a-b)\cdot(b-c)\cdot(a-c).$$

Determinați cea mai mică valoare a numărului $a+b+c$.

Soluție:

$a,b,c\in N \Rightarrow$ cel puțin două au aceeași paritate $\Rightarrow (a-b)\cdot(b-c)\cdot(a-c)\,\vdots\,2 \Rightarrow a+b+c\,\vdots\,2$ ……………......**1p**

Dacă a,b,c dau resturi diferite la împărțirea cu 3 $\Rightarrow (a-b)\cdot(b-c)\cdot(a-c)\,\vdots\,3$ în timp ce $a+b+c$ este divizibil cu 3, rezultă contradicție…………………………………………………………………......**2p**

Obținem deci că cel puțin două dintre cele trei numere dau același rest la împărțirea cu 3. ……...............**1p**

Fie acestea a și b, $a=3k_1+r$, $b=3k_2+r$, $r\in\{0,1,2\}$

Avem $(a-b)\cdot(b-c)\cdot(a-c)\,\vdots\,3 \Rightarrow a+b+c\,\vdots\,3$

$\Rightarrow a+b+c=3(k_1+k_2)+2r+c\,\vdots\,3 \Rightarrow c=M_3+r \Rightarrow (a-b)\cdot(b-c)\cdot(a-c)\,\vdots\,27$ **1p**

Deci $(a-b)\cdot(b-c)\cdot(a-c)\,\vdots\,27$ și $(a-b)\cdot(b-c)\cdot(a-c)\,\vdots\,2$, $(2,27)=1 \Rightarrow a+b+c\,\vdots\,54 \Rightarrow a+b+c\geq 54$ ...**1p**

Căutăm soluții pentru $a+b+c=54$ și găsim $a=21, b=18, c=15$.………………………………………**1p**

Subiectul 3.

Fie $n\in\mathbf{N}$ și unghiul AOB un unghi alungit. În același semiplan determinat de dreapta AB se consideră punctele $A_1, A_2, A_3, ..., A_n, B_1, B_2, B_3, ..., B_n$ cu proprietățile:

i) $m(\angle AOA_1)=m(\angle BOB_1)=1^\circ$; $m(\angle A_1OA_2)=m(\angle B_1OB_2)=3^\circ$; $m(\angle A_2OA_3)=m(\angle B_2OB_3)=5^\circ$ și așa mai departe.

ii) unghiurile A_iOA_{i+1} au interioarele disjuncte două câte două și unghiurile B_iOB_{i+1} au interioarele disjuncte două câte două oricare ar fi $i\in\{1,2,...,n\}$.

a) Aflați valoarea maximă a numărului natural n.

b) Câte perechi de semidrepte $[OA_i$, $[OB_j$ coincid?

c) Câte perechi de semidrepte $[OA_i$, $[OB_j$ sunt perpendiculare?

Soluție:

a) $m(\angle AOA_1)+m(\angle A_1OA_2)+...+m(\angle A_{n-1}OA_n)\leq 180^\circ \Rightarrow 1+3+5+...+(2n-1)\leq 180 \Rightarrow n=13$. …**2p**

b) $[OA_i=[OB_j \Leftrightarrow m(\angle AOA_i)+m(BOB_j)=180^\circ \Rightarrow i^2+j^2=180^\circ \Rightarrow i,j\,\vdots\,6 \Rightarrow (i,j)\in\{(6,12);(12,6)\}$ …..**2p**

c) $OA_i \perp OB_j \Leftrightarrow m(\widehat{AOA_i})+m(\widehat{BOOB_j})=90^\circ \Leftrightarrow i^2+j^2=90 \Rightarrow (i,j)\in\{(3,9),(9,3)\}$ …….**3p**

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poștal 430282
Telefon și fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro